Técnicas de estática comparativa

Aplicaciones matemáticas para economía y negocios (EAF2010)

Felipe Del Canto

Pontificia Universidad Católica de Chile

Primer semestre de 2021

Regla de la cadena

MOTIVACIÓN: “ESPIONAJE” CORPORATIVO

- Una empresa A quiere determinar las ventas de una empresa B.

- A supone que las ventas siguen el modelo que vimos antes:

$$V(p, A) = 1000(5 - pe^{-kA}).$$

- Pero la empresa A sabe que p y A varían con el tiempo t.
  - Es decir, debiéramos escribir $A(t)$ y $p(t)$.
  - Para mostrar que son funciones del tiempo t.

Motivación: "Espionaje" corporativo

- ¿Cómo afecta el tiempo a las ventas de la empresa B?
- ¿Afecta más a través de p o de A?
- Veremos una herramienta para descubrirlo.

Regla de la cadena

- En el ejemplo anterior, V depende de t a través de p y A.

- Una opción para calcular $\frac{dV}{dt}$ es reemplazar las expresiones de p y A.
  - Y nos quedaríamos con una función univariada $V(t)$.

- Pero hay dos problemas:
  - Puede ser que no conozcamos $p(t)$ y $A(t)$.
  - Puede no interesarnos el valor, sino que una descripción.

Teorema (Regla de la cadena)

Sea $f(x_1,\dots,x_n)$ y supongamos que $x_i = x_i(t)$ (todas las variables x_i son funciones de t). Llamemos $g(t) = f(x_1(t),\dots,x_n(t))$. Entonces

$$\frac{dg}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{dx_1}{dt} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot \frac{dx_n}{dt}$$

- Aquí t no necesariamente es el tiempo, puede ser cualquier variable.
- A veces, cuando es claro, solo escribimos $\frac{df}{dt}$ y no $\frac{dg}{dt}$.

Ejemplo (Regla de la cadena)

Supongamos que una persona tiene una función de utilidad $U(w,e)$, donde w es su salario y e es el esfuerzo que pone en el trabajo. Tiene sentido además pensar que el salario depende del esfuerzo, por lo que escribimos $w(e)$. ¿Cuál es la utilidad marginal del esfuerzo?

Ejemplo (Regla de la cadena)

¿Qué signos se espera que tengan las derivadas $w'(e)$, $\frac{\partial U}{\partial w}$ y $\frac{\partial U}{\partial e}$? ¿Cómo se interpreta entonces la derivada anterior?

Ejercicio

Repita el ejercicio anterior para $U(w,e) = \ln(w) - e^2$ y $w(e) = \sqrt{e}$. Interprete. ¿Puede encontrar el valor de e que maximiza la utilidad?

Teorema (Fórmula de Leibniz)

Sea $f(t,x)$ una función bivariada, sean $a(t)$ y $b(t)$ funciones derivables. Supongamos que las dos derivadas parciales de f existen y definamos la función

$$F(t) = \int_{a(t)}^{b(t)} f(t,x)\,dx$$

Entonces, la derivada de F está dada por

$$F'(t) = f(t,b(t))b'(t) - f(t,a(t))a'(t) + \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\,dx$$

- Notar que cuando t varía, los límites de integración y el integrando cambian.

“Demostración” (Fórmula de Leibniz)

Llamemos $H(a,b,t)$ a la función

$$H(a,b,t) = \int_a^b f(t,x)\,dx$$

Según el teorema a y b dependen de t, así que por la regla de la cadena:

$$\frac{dH}{dt} = \underbrace{\frac{\partial H}{\partial a} \cdot a'(t)}_{\text{cambio en el límite inferior}} + \underbrace{\frac{\partial H}{\partial b} \cdot b'(t)}_{\text{cambio en el límite superior}} + \underbrace{\frac{\partial H}{\partial t} \cdot \frac{dt}{dt}}_{\text{cambio en el integrando}}$$

Las derivadas $\frac{\partial H}{\partial a}$ y $\frac{\partial H}{\partial b}$ se obtienen usando el teorema fundamental del cálculo y $\frac{\partial H}{\partial t}$ simplemente se obtiene derivando dentro de la integral.

Ejemplo (Fórmula de Leibniz)

En una empresa, la utilidad neta $y(t)$ es una función del tiempo t, con $t \in [0,T]$. Para un punto de partida $s \in [0,T]$ el valor presente de las utilidades (futuras) de la empresa se calcula

$$V(s,r) = \int_s^T y(t)e^{-r(t-s)}\,dt,$$

donde r es la tasa de descuento. Encuentre $V_s(s,r)$.

Ejercicio

Considere la función N definida por

$$N(t) = \int_{t-T(t)}^{t} n(\tau)e^{-\delta(t-\tau)}\,d\tau,$$

donde $T(t)$ es una función derivable y positiva, y δ es una constante. Encuentre $N'(t)$.

Función implícita

- En el mercado de la bencina existe un impuesto específico t.
  - Este impuesto se aplica legalmente a los consumidores.
- Luego, la demanda de bencina es función del precio p y del impuesto, $D(t,p)$.
  - Supongamos que la oferta solo depende de p, es decir, $S = S(p)$.
- Según lo anterior, el equilibrio viene dado por

$$D(t,p) = S(p)$$

Motivación: Impuestos

- ¿Cómo afecta el impuesto al precio de equilibrio?

- En general para saber eso querríamos despejar p, ¿se puede?

- Las respuestas no son obvias e intentaremos dar herramientas para verlo.

Funciones implícitas

- Cuando escribimos $y = f(x)$, decimos que "y es función de x".

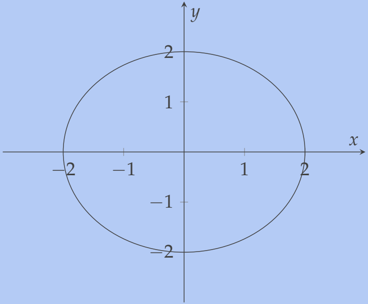
- Lo vemos porque la relación es **explícita**.

- Pero a veces podemos encontrar funciones **implícitas**.
  - A partir de ciertas relaciones entre variables.

Ejemplo (función implícita)

Consideremos la ecuación $x^2 + y^2 = 4$. Los puntos (x,y) que verifican esta relación forman un círculo en el plano.

Gráfico de $x^2 + y^2 = 4$



Es claro que x e y no pueden tener cualquier valor y, de hecho, para un valor dado de x o y hay solo unas pocas opciones para el otro (dos en general). De alguna manera hay una relación **implícita** entre ambas variables.

Ejemplo (función implícita)

Supongamos que las utilidades (B) de una empresa vienen dadas por

$$B^2 + \ln B - \sqrt{B_{-i}} = 0$$

donde B_{-i} es la suma de las utilidades de sus competidoras. Esta ecuación determina una relación **implícita** entre B y B_{-i}, pero no veo cómo podemos despejarla. La pregunta es:

¿Es cierto que para cada B_{-i} existe un único B que cumpla la relación?
En otras palabras, ¿es la relación implícita una **función**?

Funciones implícitas y curvas de nivel

- Antes de pasar al resultado relevante, pensemos en los ejemplos anteriores.
  - En el primero la relación era $f(x,y) = 4$.
  - En el segundo la relación era $g(B, B_{-i}) = 0$.

- Pareciera ser que estas relaciones implícitas son **curvas de nivel**.

- Esto será importante para interpretar el teorema principal de este capítulo.

Teorema (Teorema de la función implícita en $\mathbb{R}^2$)

Sea $G(x,y)$ una función con primeras derivadas continuas. Supongamos que $G(x_0,y_0)=c$ en un cierto punto (x_0,y_0) y que en ese punto $G_y \neq 0$. Entonces, existe una función $y(x)$ (que tiene derivada continua) definida alrededor de x_0 para la cual se cumple:

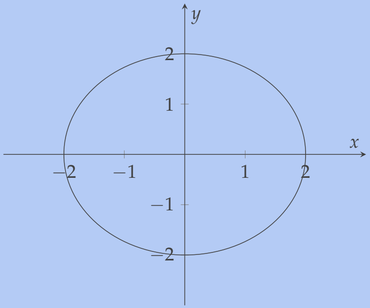
1. $G(x,y(x))=c$.
2. $y(x_0)=y_0$.
3. $y'(x_0)=-\frac{G_x(x_0,y_0)}{G_y(x_0,y_0)}$.

- **¡Ojo!** El teorema dice “existe la función” pero no dice que podemos escribirla.
- Además, dice que la función existe *localmente*, cerca de (x_0,y_0).

Ejemplo (Teorema de la función implícita, TFI)

Para la ecuación $G(x,y) = x^2 + y^2 = 4$. Tenemos que $G_y(x,y) = 2y$, que se anula solo cuando $y = 0$. Luego, en todos los puntos (x_0, y_0) con $y_0 \neq 0$, existe una función implícita $y(x)$.

Gráfico de $x^2 + y^2 = 4$



Ejercicio (Teorema de la función implícita)

Para las utilidades de la empresa dadas por $G(B, B_{-i}) = B^2 + \ln B - \sqrt{B_{-i}} = 0$, determine si existe $B(B_{-i})$ y, de existir, calcule su derivada.

Teorema de la función implícita

- El TFI nos dice cómo calcular la derivada en un punto.
  - Pero en todo punto donde la función implícita exista, la fórmula es la misma.

- También podemos calcularla usando la regla de la cadena:

$$
\begin{aligned}
G(x,y(x)) &= c \qquad\qquad \Big/ \frac{d}{dx} \\
G_x \cdot \frac{dx}{dx} + G_y \cdot y'(x) &= 0 \\
y'(x) &= -\frac{G_x}{G_y}
\end{aligned}
$$

- Aquí además vemos una razón por la cual queremos que $G_y \neq 0$.

Ecuación de la tangente a $F(x,y) = c$

Ecuación de la tangente a $F(x, y) = c$

- El TFI nos dijo cómo es la derivada en un punto dado de la curva de nivel.
- De aquí es directo encontrar la tangente a $F(x, y) = c$ en (x_0, y_0):

$$y - y_0 = -\frac{F_x(x_0, y_0)}{F_y(x_0, y_0)}(x - x_0) \tag{2.1}$$

- Pero, ¿qué pasa con las curvas de nivel que no siempre son funciones?
  - Es decir, ¿qué pasa cuando $F_y(x_0, y_0) = 0$?

- Notar que si reescribimos la ecuación anterior:

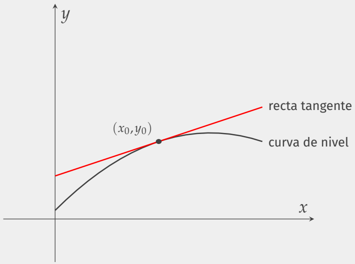
$$F_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)+F_y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)=0 \tag{2.2}$$

  entonces pareciera que no hay problemas si $F_y = 0$.

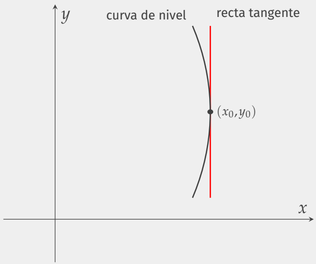
- Cuando $F_y \neq 0$ sabemos que (2.1) y (2.2) son idénticas.

- Pero cuando $F_y = 0$, (2.1) no es válida.
  - Pero en ese caso lo que ocurre es que la curva de nivel es localmente vertical.
  - Y, por lo tanto, (2.2) representa correctamente la recta tangente en ese punto:

$$F_x(x_0,y_0)(x-x_0)=0 \qquad \text{ó} \qquad x = x_0$$



Caso $F_y \neq 0$, la tangente no es vertical.



Caso $F_y = 0$, la tangente es vertical.

El gradiente y las curvas de nivel

- Podemos reescribir (2.2) así

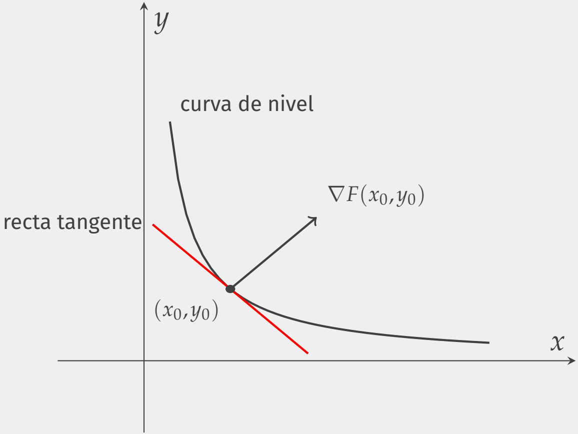
$$(x - x_0, y - y_0) \cdot (F_x(x_0, y_0), F_y(x_0, y_0)) = 0$$

  donde $\cdot$ es el producto punto entre vectores (recuerden Álgebra Lineal).

- ¡Pero el segundo término es $\nabla F(x_0, y_0)$!

- Esto dice que $\nabla F(x_0, y_0)$ es perpendicular a la curva de nivel en (x_0, y_0).

El gradiente y las curvas de nivel



Proposición (El gradiente es perpendicular a la curva de nivel)

Sea $f(x,y)$ una función con derivadas parciales continuas. Sea (x_0,y_0) un punto de la curva de nivel $f(x,y)=c$ donde $\nabla f(x_0,y_0)\neq 0$. Entonces $\nabla f(x_0,y_0)$ es perpendicular a la tangente de la curva de nivel $f(x)=c$ en el punto (x_0,y_0).

- Este resultado también vale para funciones multivariadas.
  - Pero la interpretación geométrica no es tan directa como antes.
- Esto será importantísimo para los capítulos de optimización.

Aproximación lineal: El diferencial total

- Recordemos el modelo de ventas basado en precios y gasto en publicidad
- El número de ventas V dependía del precio p y el gasto en publicidad A.
- La empresa se pregunta, ¿gasto un poco más en publicidad? ¿subo el precio?

Motivación: Modelo de ventas

- Podrían calcular V para nuevos valores.
- Pero si la relación es complicada, eso puede ser engorroso.
- ¿Se puede aproximar el resultado?
  - La respuesta es sí y ¡basta con usar derivadas!

- Si p y A cambian a $p + dp$ y $A + dA$, el cambio en V, ΔV, es

$$\Delta V = V(p + dp, A + dA) - V(p, A)$$

- Si dp y dA son muy pequeños (en valor absoluto), entonces

$$\Delta V \approx V_p(p, A) \cdot dp + V_A(p, A) \cdot dA \tag{2.3}$$

- El lado derecho tiene un nombre especial que definiremos a continuación.

Ejercicio: Muestre que (2.3) es correcta.

Definición (Diferencial total)

Sea $f(x_1,\ldots,x_n)$ una función con derivadas parciales. Definimos el diferencial total de f en el punto x como

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$$

- Para una función bivariada $f(x,y)$, su diferencial en un punto (x_0,y_0) es

$$df = f_x(x_0,y_0) \cdot dx + f_y(x_0,y_0) \cdot dy$$

- En el ejemplo anterior, teníamos que, cuando dp y dA eran pequeños,

$$\Delta V \approx dV$$

Ejemplo (Diferencial total)

Para el modelo de ventas que teníamos (con $k = 1$)

$$V(p, A) = 1000(5 - pe^{-A})$$

La empresa tiene $p = 1$ y $A = 0$ y se pregunta si aumentar p y/o A, ¿qué efectos tiene esto sobre V?

Ejemplo (Diferencial total)

Compare la aproximación dada por el diferencial con el valor real.

Ejercicio (Diferencial total)

Para una función $F(x,y)$ cualquiera, encuentre la pendiente de la tangente a una curva de nivel usando el diferencial total.

Elasticidades parciales

Motivación: Viralización

- Una persona viraliza una idea que se le ocurrió.
  - A medida que pasa el tiempo la gente conoce más.
  - Pero los que la difunden olvidan los detalles.
  - ¿Cuánto sabe cada persona a cada momento?

- Pensemos que el conocimiento C de una persona se modela así:

$$C(x,t) = \frac{c}{\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{at}}$$

  - x es la distancia que tiene la persona con la creadora de la idea.
  - t es el tiempo transcurrido desde la viralización.
  - a y c son constantes.

Motivación: Viralización

- ¿Qué tan sensible es el conocimiento a la distancia al creador?
  - La derivada nos da una idea en niveles, pero no en sensibilidad.
  - Nos serviría ver la relación entre cambios porcentuales.

- Pero en dos variables, los cambios porcentuales no son claros.
  - De nuevo, debemos recurrir a la “parcialidad”.
  - Es decir, a congelar variables.

Motivación: Viralización

- El cambio porcentual en C entre los puntos (x_0, t_0) y (x_1, t_0) es

$$\frac{\overbrace{C(x_1,t_0) - C(x_0,t_0)}^{\Delta_x C}}{C(x_0,t_0)} \times 100$$

- El cambio porcentual en x en esa situación es

$$\frac{\overbrace{x_1 - x_0}^{\Delta x}}{x_0} \times 100$$

- Y, por lo tanto, la razón de cambios porcentuales es

$$\frac{\frac{\Delta_x C}{C} \times 100}{\frac{\Delta x}{x_0} \times 100} = \frac{x_0}{C(x_0,t_0)} \times \frac{\Delta_x C}{\Delta x}$$

Motivación: Viralización

- Si Δx es muy pequeño, entonces

$$\frac{\Delta_x C}{\Delta x} \approx \frac{\partial C}{\partial x}(x_0, t_0)$$

- Y, por lo tanto, la sensibilidad a cambios en el tiempo es:

$$\frac{x_0}{C(x_0,t_0)} \times \frac{\partial C}{\partial x}(x_0,t_0) = \frac{x_0}{C(x_0,t_0)} \times -\frac{2x_0}{at_0} C(x_0,t_0) = -\frac{2x_0^2}{at_0}$$

- Lo que se interpreta como

“cambio porcentual en C ante cambios porcentuales (pequeños) en x”

Elasticidad parcial

Definición (Elasticidad parcial)

Sea $y = f(x_1, \ldots, x_n)$ una función multivariada. Definimos la elasticidad parcial de y (ó f) con respecto a x_i en el punto $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ como

$$\epsilon_{y,x_i} = \frac{x_i^0}{f(x_1^0, \ldots, x_n^0)} \times \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1^0, \ldots, x_n^0) = \frac{x_i^0}{y^0} \times \frac{\partial y}{\partial x_i}$$

donde $y^0 = f(x_1^0, \ldots, x_n^0)$.

- Observar que la elasticidad también es un concepto local.
  - Por lo que su interpretación es local.
  - Pero también puede verse como una función, si la calculamos en cada punto.

Ejercicio (Elasticidad parcial)

La demanda por dinero real en el modelo Baumol-Tobin es una función

$$M^D(c,Y,i) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2cY}{i}},$$

donde c es el costo de sacar dinero del banco, Y es el ingreso e i es la tasa de interés. ¿Cuál es la sensibilidad de la demanda de dinero al ingreso, cuando el $Y = 100$, $i = 0{,}01$ y $c = 1$?

$$\epsilon_{M^D,Y} = \frac{100}{M^D(1,100,0.01)} \times \frac{\partial M^D}{\partial Y}(1,100,0.01).$$

Primero,

$$\frac{\partial M^D}{\partial Y} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2c}{i}} \times \frac{1}{2\sqrt{Y}} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{2c}{Yi}} \Longrightarrow \frac{\partial M^D}{\partial Y}(1,100,0.01) = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

Ejercicio (Elasticidad parcial)

Y como $M^D(1,100,0.01) = 50\sqrt{2}$, entonces

$$\epsilon_{M^D,Y} = \frac{100}{50\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{1}{2}$$

Notar que si Y aumenta en 1%, entonces $M^D \approx 50{,}2494\sqrt{2}$, lo que corresponde a un cambio porcentual de

$$\frac{50{,}2494\sqrt{2} - 50\sqrt{2}}{50\sqrt{2}} \times 100 = 0{,}4988\,\%$$

¡que es casi la mitad de 1%!

Ejercicio (Elasticidad parcial)

Calcule $\epsilon_{C,t}(x,t)$ (elasticidad como función) para la función de la motivación:

$$C(x,t) = \frac{c}{\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{at}}$$

Luego, calcúlela en el punto $(1, 100)$.

Relación con la "derivada logarítmica"

- Los cambios porcentuales tienen directa relación con los logaritmos.

- Pensemos en la función univaridada $\ln(x)$, su diferencial total es

$$d\ln(x) = \frac{d\ln(x)}{dx} \cdot dx \Longleftrightarrow d\ln(x) = \frac{1}{x} \cdot dx \Longleftrightarrow 100 \cdot d\ln(x) = \frac{dx}{x} \cdot 100$$

- Es decir, el cambio porcentual en x es similar al cambio en su logaritmo.

Relación con la "derivada logarítmica"

- Si la elasticidad es la razón de cambios porcentuales, entonces

$$\epsilon_{y,x_i} \text{ “}{=}\text{” } \frac{\partial ln(y)}{\partial ln(x_i)} \qquad \text{(la derivada parcial de } \ln(y) \text{ con respecto a } \ln(x_i)\text{)}$$

- De hecho, la igualdad es cierta (veámoslo en 1 variable)

$$\begin{aligned} y &= f(x) \\ \ln y &= \ln\left\{f\left(e^{\ln(x)}\right)\right\} \\ \frac{d\ln(y)}{d\ln(x)} &= \underbrace{\frac{1}{f\left(e^{\ln(x)}\right)}}_{\text{derivada del logaritmo}} \times \underbrace{\frac{df}{dx}}_{\text{derivada de } f} \times \underbrace{e^{\ln(x)}}_{\substack{\text{derivada de } e^{\ln(x)} \\ \text{con respecto a } \ln(x)}} \end{aligned}$$

Relación con la "derivada logarítmica"

- Y si reemplazamos $e^{\ln(x)} = x$ y $f(x) = y$, obtenemos

$$\frac{dy}{d\ln(x)} = \frac{x}{y} \times \frac{dy}{dx} = \epsilon_{y,x}$$

- Lo mismo aplica para funciones multivariadas, cambiando d por ∂:

$$\epsilon_{y,x_i} = \frac{x}{y} \times \frac{\partial y}{\partial x_i} = \frac{\partial \ln(y)}{\partial \ln(x)}$$

Elasticidades de funciones compuestas

- A comienzos de este capítulo hablamos de funciones compuestas.
- ¿Qué pasa con la elasticidad para este tipo de funciones?
- Tendremos que usar la regla de la cadena.

Ejemplo (Elasticidad de una función compuesta)

Recordemos el ejemplo de la regla de la cadena, donde la utilidad U depende del salario w y el esfuerzo e. Al mismo tiempo, $w = w(e)$. Para calcular la elasticidad de U con respecto a e basta definir V como la versión univariada de U:

$$V(e) = U(w(e), e)$$

Luego

$$\epsilon_{U,e} = \epsilon_{V,e} = \frac{e}{V} \times \frac{dV}{de}.$$

Y por la regla de la cadena

$$\frac{dV}{de} = \frac{\partial U}{\partial w} \times \frac{dw}{de} + \frac{\partial U}{\partial e}$$

Ejemplo (Elasticidad de una función compuesta)

Juntando todo

$$\begin{aligned}
\epsilon_{U,e} &= \frac{e}{U} \times \left(\frac{\partial U}{\partial w} \times \frac{dw}{de} + \frac{\partial U}{\partial e} \right) \\
&= \frac{e}{U} \times \frac{\partial U}{\partial w} \times \frac{dw}{de} + \frac{e}{U} \times \frac{\partial U}{\partial e} \\
&= \left(\frac{w}{U} \times \frac{\partial U}{\partial w} \right) \times \left(\frac{e}{w} \times \frac{dw}{de} \right) + \frac{e}{U} \times \frac{\partial U}{\partial e} \\
&= \epsilon_{U,w} \epsilon_{w,e} + \epsilon_{U,e}
\end{aligned}$$

- Este resultado se puede generalizar.

Teorema (Elasticidad de funciones compuestas)

Sea $y = F(x_1, \ldots, x_n)$ una función multivariada. Supongamos que cada x_i es a su vez una función, $x_i = f^i(t_1, \ldots, t_n)$. Entonces, la elasticidad de y con respecto a t_j está dada por:

$$\epsilon_{y,t_j} = \sum_{i=1}^{n} \epsilon_{y,x_i} \epsilon_{x_i t_j}$$

Ejercicio (Elasticidad de funciones compuestas)

Suponga que la demanda por juegos de PS4, D, depende del precio de estos (p) y del precio de la consola (q). A su vez, ambos precios dependen del tiempo (t), pero solo el primero depende además del costo de transporte c. Encuentre $\epsilon_{D,t}$ y $\epsilon_{D,c}$.

APLICACIÓN: ELASTICIDAD DE SUSTITUCIÓN

- Hay situaciones donde un agente económico busca sustituir bienes o factores.
  - Mantequilla de maní o de avellanas para el desayuno.
  - Trabajo o capital para la producción de una empresa.

- Pensando en el segundo caso, digamos que la producción, dados L y K, es

$$F(L,K) = L^{0{,}7}K^{0{,}3}$$

- Pensemos que la empresa quiere producir 1 unidad del bien.
  - Todas las combinaciones de K y L que hacen eso se ven en la curva de nivel.

$$L^{0{,}7}K^{0{,}3} = 1$$

Aplicación: Elasticidad de sustitución

- La pendiente de la curva de nivel dice cómo sustituir (marginalmente) K y L.
  - Para mantenernos dentro de la curva de nivel.

- Esa pendiente es, según el TFI,

$$\frac{dK}{dL} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial L}}{\frac{\partial F}{\partial K}}$$

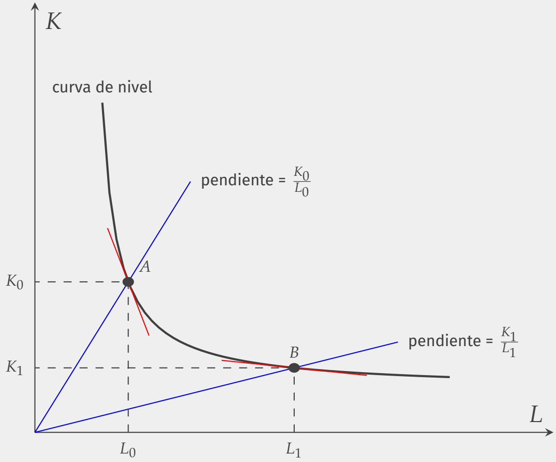
- Y definimos la tasa marginal de sustitución entre K y L como

$$TMS_{L,K} = -\frac{dK}{dL} = \frac{\frac{\partial F}{\partial L}}{\frac{\partial F}{\partial K}}$$

Aplicación: Elasticidad de sustitución

- La TMS nos dice cómo debemos intercambiar L y K para producir lo mismo.
- Eso cambiará la razón $\frac{K}{L}$, pero ¿qué tan sensible es esta fracción?
- Esa sensibilidad es una elasticidad.
  - Específicamente, la de $\frac{K}{L}$ respecto a $TMS_{L,K}$.

Aplicación: Elasticidad de sustitución



Definición (Elasticidad de sustitución)

Sea $F(x_1, x_2) = c$ una curva de nivel de F. Definimos la elasticidad de sustitución entre x_i y x_j como

$$\sigma_{x_i,x_j} = \epsilon_{(x_i/x_j),TMS_{x_j,x_i}} = \frac{TMS_{x_j,x_i}}{(x_i/x_j)} \times \frac{\partial(x_i/x_j)}{\partial TMS_{x_j,x_i}},$$

donde

$$TMS_{x_j,x_i} = \frac{\frac{\partial F}{\partial x_j}}{\frac{\partial F}{\partial x_i}}$$

- Notar que calculamos la derivada de la fracción $\frac{x_i}{x_j}$ con respecto a la TMS_{x_j,x_i}.

Ejemplo (Elasticidad de sustitución)

Para el ejemplo de la producción, donde $F(L,K) = L^{0,7}K^{0,3}$ tenemos

$$TMS_{L,K} = \frac{\frac{\partial F}{\partial L}}{\frac{\partial F}{\partial K}} = \frac{0,7\left(\frac{K}{L}\right)^{0,3}}{0,3\left(\frac{L}{K}\right)^{0,7}} = \frac{7}{3} \times \frac{K}{L}$$

Luego

$$\frac{K}{L} = \frac{3}{7} TMS_{L,K} \Longrightarrow \frac{\partial(K/L)}{\partial TMS_{L,K}} = \frac{3}{7}$$

Juntando todo

$$\sigma_{K,L} = \frac{TMS_{L,K}}{(K/L)} \times \frac{\partial(K/L)}{\partial TMS_{L,K}} = \frac{\frac{7}{3}(K/L)}{(K/L)} \times \frac{3}{7} = 1$$

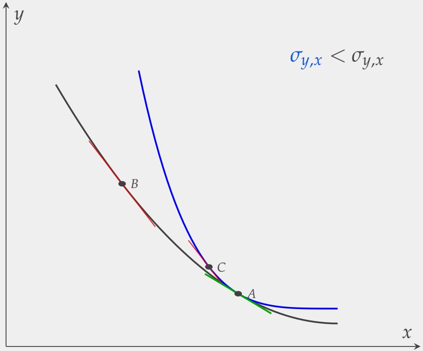
Ejercicio (Elasticidad de sustitución)

Calcule la elasticidad de sustitución de la siguiente función

$$F(K,L) = A\left(aK^{-\rho} + bL^{-\rho}\right)^{-m/\rho}$$

donde A, a y b son constantes positivas y $\rho > -1$ pero no cero.

- La elasticidad de sustitución tiene implicancias geométricas.
  - Nos da una idea de la curvatura de la curva de nivel.



La idea es que a mayor σ, la curva de nivel debe estar más acostada.